O GRUPO SIMÉTRICO

Chama-se GRUPO SIMÉTRICO, e escrevemos S_n, o grupo de permutações de n objetos. Nas listas de problemas já ficamos familiarizados com dois deles:

S_3 que é isomorfo ao grupo do triângulo e C_{3v},

S_4 que é isomorfo ao grupo do tetraedro T_d.

A ordem do grupo é $n! = \Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdots n$

A importância do grupo simétrico (GS) reside no fato que todo grupo finito é isomorfo à algum S_n o subgrupo de algum S_n. Também é importante no estudo das representações (tensoriais) dos grupos contínuos.

Em Física as aplicações mais importantes estão ligadas a problemas relacionados com partículas idênticas. Uma aplicação famosa é a classificação dos hadrons em termos dos "quarks" (Gell-Mann e Ne'eman), estados que transformam como as RI do grupo SU(3).

Escreveremos as permutações como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & & a_n \end{pmatrix} \qquad 1 \to a_1 \,,\ 2 \to a_2 \,,\ 3 \to a_3 \dots$$

$$n \to a_n .$$

Sabemos (por experiência com S_3 e S_4) que toda permutação pode-se escrever como um produto de ciclos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} = (a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k})(a_{i_{k+1}} \dots) \dots (a_{i_m} a_{i_{m+1}} \dots)$$

1. Teorema. As classes conjugadas tem uma estrutura de ciclos típica

Dem. Olhar livro de Hamermesh

Exemplo: S_3 : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Temos três (3) classes conjugadas dadas por

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123), \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(23), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (2)(13), \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (3)(12).$$

2. Todas as possíveis estruturas de ciclos ficam dadas pelas partições possíveis de n em somas de n inteiros.

Chamamos $[\lambda] = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ esta partição.

Se escreve na ordem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ com

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$$

Teorema. Uma classe conjugada corresponde com uma estrutura de ciclos particular.

Dem.

Sejam duas permutações

$$a = \begin{pmatrix} 1 2 \ldots n \\ a_1 a_2 \ldots a_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 2 \ldots n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \ldots a_n \\ a_{b_1} \ldots a_{b_n} \end{pmatrix}$$

A inversa de $\underline{b}$ é $\quad b^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 b_2 \ldots b_n \\ 1 \; 2 \quad n \end{pmatrix}$

Encontramos agora a permutação $a' = b a b^{-1}$, conjugada de $\underline{a}$:

$$a' = b a b^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 \, b_2 \ldots b_n \\ \cancel{1 \; 2 \ldots n} \\ \cancel{a_1 \, a_2 \ldots a_n} \\ a_{b_1} \, a_{b_2} \ldots a_{b_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 b_2 \ldots b_n \\ a_{b_1} a_{b_2} \ldots a_{b_n} \end{pmatrix}$$

Vemos que $\underline{a'}$ pode ser obtida de $\underline{a}$, permutando com $\underline{b}$ separadamente as duas linhas

$$1 2 \ldots n \xrightarrow{b} b_1 \, b_2 \ldots b_n$$

$$a_1 a_2 \ldots a_n \xrightarrow{b} a_{b_1} a_{b_2} \ldots a_{b_n}$$

Ex. $\quad a = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} = (14)(23), \qquad b = \begin{pmatrix} 1234 \\ 2134 \end{pmatrix} = (12)$

$$a = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix} \longrightarrow a' = \begin{pmatrix} 2134 \\ 4312 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1234 \\ 3412 \end{pmatrix} = (13)(24)$$

$\underline{a'}$ tem a mesma estrutura de ciclos

A estrutura de classes de S_n tem a ver com as estruturas de ciclos possíveis. Supondo que uma permutação dada é resolvida da maneira seguinte:

$$\begin{array}{l} \nu_1 \text{ ciclos de comprimento } 1 \\ \nu_2 \text{ ciclos de comprimento } 2 \\ \vdots \\ \nu_n \text{ ciclos de comprimento } n \, , \end{array}$$

e como o número de símbolos é justamente n, devemos ter

$$\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \cdots + n\nu_n = n \quad .$$

Esta permutação tem a estrutura de ciclos que escrevemos simbólicamente como:

$$(1^{\nu_1}, 2^{\nu_2}, \ldots, n^{\nu_n}) \equiv (\nu)$$

Uma partição de n está definida por um conjunto de números $[\lambda] = (\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n)$ tais que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n \\ \lambda_2 &= \nu_2 + \nu_3 + \cdots + \nu_n \\ &\vdots \\ \lambda_n &= \nu_n \end{aligned}$$

Tendo

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\,\nu_n = n$$

e

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \cdots \geq \lambda_n \geq 0$$

Cada partição de n está associada à uma particular estrutura de ciclos e portanto à uma classe conjugada de S_n. Dada a partição, a estrutura de ciclos pode ser obtida de

$$\begin{cases} \nu_1 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \nu_2 = \lambda_2 - \lambda_3 \\ \quad \vdots \\ \nu_n = \lambda_n \end{cases}$$

<u>Problema</u>. Calcular o número de elementos para uma dada classe conjugada em S_n

$$\underbrace{(\cdot)\cdots(\cdot)}_{\nu_1} \quad \underbrace{(\cdot\cdot)\cdots(\cdot\cdot)}_{\nu_2} \quad - - - - - \quad \underbrace{(\cdot\cdot\cdot \cdots)}_{\nu_k}$$

Em total n lugares para n símbolos $\Longrightarrow n!$ maneiras de arranjo. Porém existirão duplicações

o ciclo $(1)(2)$ é o mesmo que $(2)(1)$. Devemos dividir pelas permutações dos ciclos $(\nu_1!\,\nu_2!\ldots\nu_n!)$.
Ademais um ciclo de comprimento 2 pode aparecer como (12) ou (21); um ciclo de ordem 3 como (123) ou (231) ou (312), etc... Assim o número total de permutações diferentes é

$$n_{(\nu)} = \frac{n!}{1^{\nu_1}.\nu_1!\;2^{\nu_2}.\nu_2!\;3^{\nu_3}.\nu_3!\ldots n^{\nu_n}.\nu_n!}$$

porque cada permutação de S_n aparece repetida

$$1^{\nu_1}\,2^{\nu_2}\ldots n^{\nu_n} \text{ vezes}$$

▸ Exemplo. Tomemos o caso de S_3. Obtemos três classes conjugadas

$$[\lambda]_1 = [300]\;,\;[\lambda]_2 = [210]\;,\;[\lambda]_3 = [111]$$

com as correspondentes estruturas de ciclos:

$$\nu_1 = 3,\; \nu_2 = 0,\; \nu_3 = 0,\quad (x)(x)(x)$$

$$\nu_1 = 1,\; \nu_2 = 1,\; \nu_3 = 0,\quad (x)(xx)$$

$$\nu_1 = 0,\; \nu_2 = 0,\; \nu_3 = 1,\quad (xxx)$$

§ Paridade de uma permutação

Consideramos 'n' variáveis independentes
$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

e uma função $\Delta = \Delta(x_1 \ldots x_n)$ que é o produto das diferenças:

$$\Delta(x_1 x_2 \ldots x_n) \equiv (x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \ldots (x_1 - x_n) \times$$
$$\times (x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \ldots (x_2 - x_n) \times$$
$$\ldots$$
$$\times (x_{n-1} - x_n)$$

pode ser escrita como:

$$\Delta(x_1 x_2 \ldots x_n) = \prod_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j>i}} (x_i - x_j)$$

Seja $\sigma \in S_n$ uma permutação. Definimos

$$\sigma \Delta \equiv \Delta\left(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}\right) = \prod_{i,j} \left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right)$$

se for $\sigma(i) > \sigma(j)$ temos

$$\left(x_{\sigma(i)} - x_{\sigma(j)}\right) = -\left(x_{\sigma(j)} - x_{\sigma(i)}\right)$$

Resulta que a mudança de Δ é apenas um sinal.

Escrevemos:

$$(\sigma\Delta) \equiv \delta_\sigma \cdot \Delta \quad ,$$

onde $\delta_\sigma = \pm 1$, é um sinal, sinal de σ.

Def. A permutação $\sigma \in S_n$ é 'par' ou 'ímpar' segundo $\delta_\sigma = +1$ ou $\delta_\sigma = -1$, respectivamente.

Teorema Sejam (σ, τ) duas permutações de S_n. Temos:

$$\delta_{\sigma\tau} = \delta_\sigma \cdot \delta_\tau$$

Dem:

$$(\sigma\tau)\Delta = \sigma(\tau\Delta) = \delta_\tau(\sigma\Delta) =$$

$$= \delta_\tau \delta_\sigma \Delta = \delta_{\sigma\tau} \Delta . \qquad \text{c.q.d.}$$

Para a identidade 'e' temos

$$e\Delta = \Delta$$

e é par por definição.

Teorema. As transposições são permutações ímpares

Dem. Seja a transposição $\tau(\ell k)$, $(\ell \rightleftarrows k)$.
Sem perda de generalidade, supomos $\ell < k$

$$\tau(\ell k)\Delta = -\Delta ,$$

porque apena muda um fator $(x_\ell - x_k) \longrightarrow$

$$(x_k - x_\ell) = -(x_\ell - x_k)$$

Teorema. Todo ciclo pode ser decomposto num produto de transposições.

Dem Verifica-se que

$$(1\,2\,3 \ldots k) = (1k)(1,k-1)\cdots(1\,3)(1\,2)$$

Dem. Por indução:

$$(1k)\Big[(1\ k-1)\cdots(1\,3)(1\,2)\Big] =$$

$$= (1k)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & 1 & k & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

IV

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k-1 & k & k+1 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & k & 1 & k+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

$$= (1\,2\,3 \ldots k-1, k) \qquad \text{c.q.d.}$$

Exemplo:

$$\left.\begin{array}{l} (123) = (13)(12), \\ (132) = (12)(13). \end{array}\right\} \text{ambas pares}$$

Resultado: Um ciclo de comprimento 'k' pode ser escrito como um produto de $(k-1)$ transposições.

Corolário. Seja σ um ciclo de comprimento 'k'. Temos $\delta_\sigma = (-1)^{k-1}$

Como toda permutação pode ser resolvida em ciclos, e como todo ciclo pode ser escrito como produto de transposições, o sinal ou parida<u>de</u> da permutação será ± 1 segundo se o número de transposições é par ou ímpar.

Seja uma permutação com uma estrutura de ciclos

$$(1^{\nu_1}\, 2^{\nu_2} \ldots n^{\nu_n}),$$

onde $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_n = \lambda_1$.

IV

Temos

$$\delta_\sigma = \prod_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)\nu_k} =$$

$$= (-1)^{\sum_k (k\nu_k - \nu_k)}$$

Sabemos que $\sum_{k=1}^{n} k\nu_k = n$, $\sum_{k=1}^{n} \nu_k = \lambda_1$

Obtemos:

$$\delta_\sigma = (-1)^{n-\lambda_1}$$

A paridade é uma caraterística de uma estrutura de ciclos $\Rightarrow$ é uma caraterística de uma classe conjugada completa.

Teorema 1. Todas as permutações pares formam um subgrupo de S_n, chamado de 'subgrupo Alternante', $\mathcal{A}_n$

Teorema 2. Em S_n, a metade das permutações são pares e formam o subgrupo $\mathcal{A}_n$. A outra metade são permutações ímpares.

Ordem de $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} n!$

Cód. 1726

Dem. Seja δ_σ o sinal de $\sigma \in S_n$. Somamos sobre todos o elementos do grupo:

$$\sum_{\sigma \in S_n} \delta_\sigma \equiv P$$

Seja agora uma permutação ímpar τ. Para τ fixo, e σ percorrendo todo o grupo, $(\tau\sigma)$ também faz a mesma coisa. Portanto:

$$P = \sum_{\sigma \in S_n} \delta_\sigma = \sum_{\sigma \in S_n} \delta_{(\tau\sigma)} = \sum_{\sigma \in S_n} \delta_\tau \cdot \delta_\sigma =$$

$$= -\sum_{\sigma \in S_n} \delta_\sigma = -P \Rightarrow P = 0$$

Como a soma de todos os sinais é nula, devemos ter tantas permutações pares como ímpares.

c.q.d.

Teorema. A permutação inversa de σ tem a mesma paridade:

Dem. $\sigma . (\sigma^{-1}) = e = (\sigma^{-1}) \sigma$

$$\Rightarrow \delta_\sigma \cdot \delta_{\sigma^{-1}} = 1 \Rightarrow \delta_{\sigma^{-1}} = \delta_\sigma$$

c.q.d

– As permutações pares formam um subgrupo $\mathcal{A}_n$, chamado subgrupo ALTERNANTE. Sua ordem é $\frac{n!}{2}$. Ele é portanto um subgrupo invariante (formado por classes completas) e de índice 2, isto é existem apenas dois cogrupos diferentes.

▶ Exemplo. $n=3$, $\mathcal{S}_3$. O subgrupo alternante $\mathcal{A}_3$ é isomorfo à $\mathcal{C}_3$.

$n=4$, $\mathcal{S}_4$, isomorfo ao grupo do tetraedro $\mathbb{T}_d$. O subgrupo alternante $\mathcal{A}_4$ é isomorfo à $\mathbb{T}$, o grupo próprio do tetraedro.

▶ Teorema importante (Cayley). Todo grupo finito G de ordem $\underline{n}$, é isomorfo com um subgrupo de $\mathcal{S}_n$. Este é um resultado importante porque limita a procura de estruturas diferentes para um grupo de ordem n. Os possíveis grupos não isomorfos aparecem em número finito, quando $\underline{n}$ é finito.

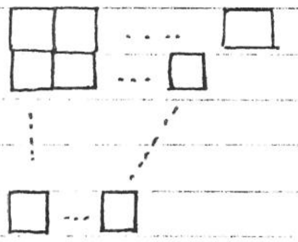
A demostração do teorema é imediata quando notamos que a tabela de multiplicação do grupo é composta de rearranjos diferentes dos elementos do grupo. Assim um elemento pode ser associado com uma permutação.

– REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS.

Como o # de RI é igual ao número de classes conjugadas podemos usar as partições $[\lambda]$ para identificar as RI's. Sempre temos duas RI's unidimensionais: uma é a rep. trivial chamada de COMPLETAMENTE SIMÉTRICA que dá o número $(+1)$ à todas as permutações; a outra é a rep. ANTISIMÉTRICA que dá o número $(+1)$ às permutações pares e (-1) às ímpares.

MOLDES DE YOUNG

Dada uma partição $[\lambda] = (\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ que carateriza uma RI de S_n, associamos com ela um MOLDE de YOUNG dado pelo diagrama

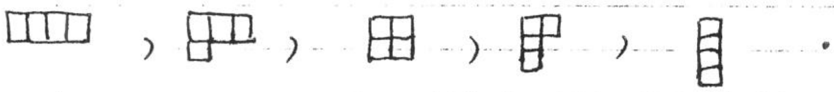


λ_1 quadradinhos
λ_2 "
$\vdots$
λ_n quadradinhos

Exemplo.

Os moldes de Young para S_3 são:

Para S_4:



Existe uma regrinha simples para calcular a dimensão de cada RI associada à $[\lambda]$

RECEITA

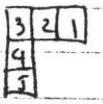
1) Se escrevem os numerais $(1,2,\dots,n)$ prenchendo os moldes de Young com as seguintes condições:

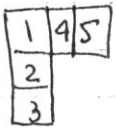
2) para cada linha os numerais não decrescem quando indo de esquerda para direita;

3) para cada coluna os numerais não decrescem de cima para baixo.

4) a dimensão da RI é igual ao número de tabelas diferentes que podem se obtidas sujeitas às condições acima (chamam-se tabelas REGULARES de Young)

 : molde de Young

 : tabela de Young.

 : tabela regular (STANDARD YOUNG TABLEAUX)

Exemplos: S_3 e S_4

S_3 : 

$\ydiagram{3}$: $\young(123)$ é a única tabela regular $\Longrightarrow$ dim $\ydiagram{3} = 1$

$\ydiagram{2,1}$: $\young(12,3)$, $\young(13,2)$ $\Longrightarrow$ dim $\ydiagram{2,1} = 2$

$\ydiagram{1,1,1}$: $\young(1,2,3)$ $\Longrightarrow$ dim $\ydiagram{1,1,1} = 1$

S_4 : $\ydiagram{4}$, $\ydiagram{3,1}$, $\ydiagram{2,2}$, $\ydiagram{2,1,1}$, $\ydiagram{1,1,1,1}$.

$\young(1234)$ $\Longrightarrow$ dim $\ydiagram{4} = 1$, $\young(1,2,3,4)$, dim $\ydiagram{1,1,1,1} = 1$

$$\ydiagram{3,1} : \quad \left.\begin{matrix} 1\,3\,4 \\ 2 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,2\,4 \\ 3 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,2\,3 \\ 4 \end{matrix} \right\} \text{dim } \ydiagram{3,1} = 3$$

$$\ydiagram{2,1,1} : \quad \left.\begin{matrix} 1\,2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,3 \\ 2 \\ 4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,4 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \right\} \text{dim } \ydiagram{2,1,1} = 3$$

$$\ydiagram{2,2} : \quad \left.\begin{matrix} 1\,2 \\ 3\,4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 1\,3 \\ 2\,4 \end{matrix} \quad \cancel{\begin{matrix} 1\,4 \\ 2\,3 \end{matrix}} \right\} \text{dim } \ydiagram{2,2} = 2$$

$$\text{Temos} \begin{cases} \text{duas RI de dim 1} \\ \text{duas RI de dim 3} \\ \text{uma RI de dim 2} \end{cases}$$

▸ **Def.** Se num molde de Young trocamos linhas por colunas obtemos um outro molde que chamaremos <u>ASSOCIADO</u> . Chamaremos $\widetilde{[\lambda]}$ a RI associada com a original $[\lambda]$. Com a nossa receita

$\widetilde{\ydiagram{3,1}} = \ydiagram{2,1,1}$, $\widetilde{\ydiagram{2,2}} = \ydiagram{2,2}$ dá para perceber que dim $[\lambda]$ = dim $\widetilde{[\lambda]}$.

Daqui resulta que as tabelas regulares devem estar associadas com os projetores de c/ RI

Vamos construir os projetores associados com as tabelas de Young. Prenchemos um molde $[\lambda] = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$

$$\begin{array}{l} a^1_1\ a^1_2 \dots a^1_i \dots a^1_{\lambda_1} \\ a^2_1\ a^2_2 \dots a^2_{\lambda_2} \\ \vdots \\ a^j_1 \dots \dots a^j_{\lambda_j} \\ \vdots \end{array}$$

Os $\underline{a}$'s são inteiros $1, 2, \dots, n$ sem ter repetição deles.

Para uma linha j definimos o operador P_j como a soma de todas as permutações dos números $(a^j_1 \dots a^j_{\lambda_j})$ que aparecem na j-ésima linha da tabela de Young. Temos tantos operadores P_j como como linhas tem a tabela. Estos P_j comutam en S_n porque não tem números em comum. Portanto formamos o produto (sem nos preocupar da ordem dos fatores)

$$P \equiv \prod_j P_j$$

Fazemos agora a mesma coisa com as colunas. Definimos como Q_i a soma das permutações dos numerais $\begin{matrix} a_i^1 \\ a_i^2 \\ \vdots \\ a_i^k \\ \vdots \end{matrix}$ que aparecem na coluna $\underline{\underline{i}}$, mas agora cada permutação está pesada pela a sua paridade. Podemos definir tambem o produto destes operadores

$$Q \equiv \prod_i Q_i$$

▸ Def. O projetor de Young associado com a correspondente tabela se define como

$$Y_{\{a_j^i\}} \equiv \frac{\dim[\lambda]}{(\sum \lambda_i)!}\, Q \cdot P$$

Exemplos. Consideremos o projetor associado com $[a_1^1 \dots a_n^1]$, i.e. todos os inteiros na linha 1 ($\overset{1\,2}{\square\square}\cdots\overset{n}{\square}$). Este molde de Young se escreve como $[\lambda] =$ $= [n]$ Qualquer que seja a ordem dos numerais na tabela obtemos como projetor a soma de todas as permutações de n objetos ($n!$) termos

$$Y_{\{a_j^1\}} \equiv \frac{1}{n!} P_1 = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \sigma = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Este projetor chama-se o projetor <u>completamente simétrico</u>

Como exemplo consideremos a função de onda de um sistema de 3 partículas:

$$\psi(123) = u(1)\,v(2)\,w(3)$$

Vejamos que função é gerada com $\hat{Y}_{\square\square\cdots\square}$

$$\hat{Y}_{\square\square\cdots\square}\psi = \hat{Y}_{\square\square\square}\,\psi(123) = \frac{1}{3!}\Big[\psi(123) + \overset{\psi(231)}{\psi(\cancel{312})} + \overset{\psi(312)}{\psi(\cancel{321})} + \psi(132)$$

$$+ \psi(321) + \psi(213)\Big] \equiv \Psi_S(123)$$

Temos gerado assim uma função completamente simetrica frente a qualquer permutação das partículas.

$$\hat{O}_{(12)}\,\Psi_S(123) = \Psi_S(123) \quad , \text{etc}\ldots$$

Esta função é base da RI $\square\square\square$, que é a rep. trivial de S_3.

Procuremos o projetor da RI de dim 1 $\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$ $[\lambda]=(1,1,1) = 1^3$

$$P = e, \qquad Q = \sum_{\sigma\in S_3} \sigma\cdot\delta_\sigma \quad , \text{onde } \delta_\sigma = \pm 1 \text{ é}$$

a paridade da permutação

$$Y_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}} = \frac{1}{3!}\Big[\hat{O}_{(123)} + \qquad + E + \hat{O}_{(132)} - \hat{O}_{(12)} - \hat{O}_{(13)} - \hat{O}_{(23)}\Big]$$

Assim temos o resultado

$$Y_{\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}}\,\psi(123) = \frac{1}{3!}\left[\psi(123) + \psi(231) + \psi(321) - \psi(213) - \psi(321) - \psi(132)\right]$$

$$\equiv \Psi_A(123) = \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} u(1) & u(2) & u(3) \\ v(2) & v(3) & v(1) \\ w(3) & w(1) & w(2) \end{vmatrix}$$

Temos gerado assim uma função totalmente antisimétrica que é base da RI $\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$.

$$\hat{O}_\sigma \Psi_A = \delta_\sigma \Psi_A$$

Podemos já prencher a tabela de carateres de S_3.

S_3	$(x)(x)(x)$	$(xxx)(2)$	$(xx)(3)$	
$\square\square\square$	1	1	1	$\Psi_S(123)$
$\begin{smallmatrix}\square\\\square\\\square\end{smallmatrix}$	1	1	-1	$\Psi_A(123)$
$\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}$	2	-1	0	$[\Psi_1(123), \Psi_2(123)]$

Tentemos construir a RI bidimensional $\begin{smallmatrix}\square\square\\\square\end{smallmatrix}$.

Peguemos a tabela de Young regular

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$$

e vamos construir o projetor $Y_{\begin{smallmatrix}1\,2\\3\end{smallmatrix}}$. Neste caso

$$P = e + (12), \qquad Q = e - (13)$$

§ Projetores de Young

Sejam $\hat{Y}_\tau$ e $\hat{Y}_{\tau'}$ dois projetores de Young correspondentes às tabelas do mesmo "molde" $[\lambda]$:

$$\tau' = s\tau ,$$

onde $s = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \dots n \\ s_1 s_2 \dots s_n \end{pmatrix}$ é a permutação que transforma uma tabela na outra. Os projetores estão relacionados por:

$$\hat{Y}_{\tau'} = s\,\hat{Y}_\tau\, s^{-1},$$

de maneira que projetores associados com o mesmo "molde" geram RI equivalentes

Ex. Sejam as tabelas $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$ do molde $\begin{array}{|c|c|}\hline \; & \; \\ \hline \; \\ \cline{1-1}\end{array} = (2,1)$

Temos:

$$\hat{Y} \equiv \hat{Y}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}} = \frac{1}{3}[e-(13)][e+(12)] = \frac{1}{3}[e+(12)-(13)-(123)]$$

$$\hat{Y}' \equiv \hat{Y}_{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}} = \frac{1}{3}[e-(12)][e+(13)] = \frac{1}{3}[e-(12)+(13)-(132)]$$

$$\tau' = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} = (23)\,\tau = (23)\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \Rightarrow s = (23)$$

Temos que encontrar os conjugados por $\underline{s}$, para calcular

$$s\,\hat{Y}\,s^{-1}$$

$$s e s^{-1} = e$$

$$s(12)s^{-1} = s\begin{pmatrix}1 2 3\\2 1 3\end{pmatrix}s^{-1} = \begin{pmatrix}1 3 2\\3 1 2\end{pmatrix} = (13)$$

$$s(13)s^{-1} = s\begin{pmatrix}1 2 3\\3 2 1\end{pmatrix}s^{-1} = \begin{pmatrix}1 3 2\\2 3 1\end{pmatrix} = (12)$$

$$s(123)s^{-1} = s\begin{pmatrix}1 2 3\\2 3 1\end{pmatrix}s^{-1} = \begin{pmatrix}1 3 2\\3 2 1\end{pmatrix} = (132)$$

Assim temos:

$$s\hat{Y}s^{-1} = \frac{1}{3}\left[e + (13) - (12) - (132)\right] = \hat{Y}'$$

Vejamos a tabelinha de multiplicação:

			e	α (123)	β (132)	λ (23)	μ (13)	ν (12)
	e		e	(123)	(132)	(23)	(13)	(12)
α	(123)		(123)	(132)	e	(13)	(23)	(13)
β	(132)		(132)	e	(123)	(13)	(12)	(23)
λ	(23)		(23)	(13)	(12)	e	(123)	(132)
μ	(13)		(13)	(12)	(23)	(132)	e	(123)
ν	(12)		(12)	(23)	(13)	(123)	(132)	e.

$$Y_{\substack{12\\3}} = \frac{2}{3!}\left[e-(13)\right]\left[e+(12)\right] = \frac{1}{3}\left[e+(12)-(13)-(123)\right]$$

$$Y_{\substack{12\\3}}\,\psi(123) = \frac{1}{3}\left[\psi(123)+\psi(213)-\psi(321)-\psi(231)\right] \equiv \Psi_1$$

Sabemos que a outra tabela regular irá a gerar uma representação equivalente. Então geramos a função parceira de Ψ_1 operando com os elementos do grupo. Encontramos

$$\hat{\Theta}_{(13)} \Psi_1 = - \Psi_1 .$$

Operamos com um outro gerador:

$$\hat{\Theta}_{(12)} \Psi_1 = \frac{1}{3} \{ u(2) v(1) w(3) + u(1) v(2) w(3) - - u(3) v(1) w(2) - u(1) v(3) w(2) \}$$

que resulta l.i. Assim definimos

$$\Psi_2 \equiv \hat{\Theta}_{(12)} \Psi_1 \quad , \quad \Psi_1 = \hat{\Theta}_{(12)} \Psi_2$$

$$\hat{\Theta}_{(13)} \Psi_2 = \frac{1}{3} \left[\psi(231) + \psi(321) - - \psi(132) - \psi(312) \right]$$

Considerando:

$$\Psi_1 = \frac{1}{3} \left[\psi(123) + \psi(213) - \psi(321) - \psi(231) \right]$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{3} \left[\psi(213) + \psi(123) - \psi(312) - \psi(132) \right]$$

obtemos :

$$\hat{\Theta}_{(13)}\, \Psi_2 = -\Psi_1 + \Psi_2$$

Matrizes da representação :

$$\Gamma[(12)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma[(13)] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usamos a tabela de multiplicação para gerar as outras matrizes:

$$\Gamma[(123)] = \Gamma[(13)(12)] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma[(132)] = \Gamma^2[(123)] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Também:

$$\Gamma[(23)] = \Gamma[(12)] \times \Gamma[(123)] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Checar:

c)

$$\hat{O}_{(23)}\Psi_2 = \frac{1}{3}\Big[\psi(312)+\psi(132)-\psi(213)-$$
$$-\psi(123)\Big]$$
$$= -\Psi_2$$

Obtemos uma representação bidimensional (<u>não unitária</u>):

$$\Gamma[e] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma[(123)] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\Gamma[(132)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma[(12)] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma[(13)] = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma[(23)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

com caraterer:

$$\chi[(x)(x)(x)] = 2, \quad \chi[(xxx)] = -1,$$
$$\chi[(x)(xx)] = 0$$

Regra prática:

A representação associada $[\tilde{\lambda}]$ tem a mesma dimensão de $[\lambda]$ (mesmo número de tablelas regulares). Os carateres são iguais para as classes pares e mudam de sinal para as classes ímpares.

Ex. Em S_3, a rep.  é autoassociada.

$\Rightarrow$ as classes ímpares têm caráter nulo.

Produtos Kronecker de Representações

Uma vez construída a tabela de carateres do grupo, podemos realizar os produtos Kronecker de todas as RIs e obter as correspondentes séries de Clebsch-Gordan.

Vejamos o processo no caso de S_3:

S_3	(x)(x)(x)	(xxx)(2)	(xx)(3)	Descomposição
$[3]$	1	1	1	
$[1^3]$	1	1	-1	
$[2,1]$	2	-1	0	
$[1^3] \times [1^3]$	1	1	1	$[3]$
$[1^3] \times [2,1]$	2	-1	0	$[2,1]$
$[2,1] \times [2,1]$	4	1	0	$[2,1] \oplus [1^3] \oplus [3]$

Construímos então a tabelinha de multiplicação

$\times$	$[3]$	$[1^3]$	$[2,1]$
$[3]$	$[3]$	$[1^3]$	$[2,1]$
$[1^3]$	$[1^3]$	$[3]$	$[2,1]$
$[2,1]$	$[2,1]$	$[2,1]$	$[2,1] \oplus [1^3] \oplus [3]$

Além do produto Kronecker de rep. existe um outro produto chamado de produto EXTERNO.

Definição. Dividamos o conjunto de n números $(1,2,3,\ldots,n)$ em dois conjuntos; o primeiro contendo $(1,2,\ldots,m<n)$ e o outro com os restantes numerais $(m+1, m+2,\ldots,n)$. O grupo de permutações do primeiro conjunto é S_m. Chamamos $\bar{S}_{n'}$, $n'=n-m$, o grupo de permutações dos outros elementos (a barra indica que é isomorfo à $S_{n'}$, e que são permutações de $(m+1),(m+2),\ldots,n$ e não de $(1,2,\ldots,n')$)

Sejam $\sigma\in S_m$ e $\bar{\sigma}\in\bar{S}_{n'}$. Como σ e $\bar{\sigma}$ agem em números diferentes elas comutam. Quando isso acontece é possível definir o produto DIRETO dos grupos

$$S_m \times \bar{S}_{n'}$$

Este é o conjunto das operações $\sigma\bar{\sigma}=\bar{\sigma}\sigma$, onde σ é uma operação em S_m que permuta os m primeiros dígitos e $\bar{\sigma}$ é uma operação em $\bar{S}_{n'}$ que permuta $[(m+1),(m+2),\ldots,n]$.

Como sabe-se da Teoria Geral por nós estudada neste curso, cada RI do grupo produto direto é o produto das RI dos grupos fatores. Então para cada RI $\Gamma^{(\nu)}$ de S_m e cada $\bar{\Gamma}^{(\mu)}$ de $\bar{S}_{n'}$ temos uma RI $\Gamma^{(\nu)}(\sigma)\times\bar{\Gamma}^{(\mu)}(\bar{\sigma})$ de $S_m\times\bar{S}_{n'}$, onde $\Gamma^{(\nu)}(\sigma)\times\bar{\Gamma}^{(\mu)}(\bar{\sigma})$ é o produto direto das matrizes individuais.

O grupo $(S_m \times \bar{S}_{n'})$ tem ordem $m!\,n'! = m!\,(n-m)!$ e é um subgrupo de S_n, o grupo de permutações de n objetos. Chamamos <u>produto externo</u> de duas RI $\Gamma^{(\nu)}(\sigma)$ e $\bar{\Gamma}^{(\mu)}(\bar{\sigma})$, e escreveremos

$$\Gamma^{(\nu)}(\sigma) \otimes \bar{\Gamma}^{(\mu)}(\bar{\sigma})$$

à rep. de grupo completo S_n <u>induzida</u> pela RI $\Gamma^{(\nu)} \times \bar{\Gamma}^{(\mu)}$ do subgrupo $S_m \times \bar{S}_{n'}$.

Como exemplo físico consideremos um sistema de seis partículas (1,2,3,4,5,6) divididos em dois subsistemas que não interagem, o primeiro com as partículas (1,2,3) e o segundo com as outras (4,5,6).

Os estados do primeiro subsistema se classificarão como as RI de S_3 $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \, & \, & \, \\ \hline\end{array}$, $\begin{array}{|c|}\hline \, \\ \hline \, \\ \hline \, \\ \hline\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline \, & \, \\ \hline \, \\ \cline{1-1}\end{array}$. A mesma coisa acontecerá com o outro sistema.

É possível que estemos tratando com um estado duas vezes degenerado $\begin{array}{|c|c|}\hline \, & \, \\ \hline \, \\ \cline{1-1}\end{array}$ do sistema 1 (com funções bases $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$) e duas vezes degenerado $\begin{array}{|c|c|}\hline \, & \, \\ \hline \, \\ \cline{1-1}\end{array}$ em relação ao sistema 2 (com funções base $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5 \\ \hline 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$ e $\begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 6 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$).

Quando os dois sistemas interagem devemos classificar os estados de acordo com as RI do grupo completo S_6. Falamos então que estamos tratando com o produto EXTERNO das Rep.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \, & \, \\ \hline \, \\ \cline{1-1}\end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|}\hline \, & \, \\ \hline \, \\ \cline{1-1}\end{array} \quad \text{ou} \quad (2,1) \otimes (2,1)$$

As matrizes $\Gamma^{(\nu)}(\sigma) \times \bar{\Gamma}^{(\mu)}(\bar{\sigma})$ são RI do grupo produto direto $S_m \times \bar{S}_{n'}$, mas em geral resultarão redutíveis em relação ao grupo completo $S_n \supset S_m \times \bar{S}_{n'}$.

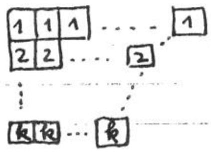
{ Induzir rep. de um grupo a partir do subgrupo

Devemos achar agora uma maneira de decompor (ou resolver) os produtos direto em RI do grupo completo.

Para isto temos tambem uma bonita

RECEITA

A. Pegue-se um dos moldes de Young e numerem-se os quadradinhos botando 1 na primeira linha, 2 na segunda, etc..., até esgotar o molde

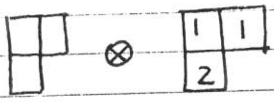


B. Tome-se todos os quadradinhos com 1 e adicionem-se no outro molde de maneira de formar moldes de Young permisíveis sem botar dígitos iguais numa mesma coluna. Faça o mesmo com os outros quadradinhos $(2, 3, \ldots, k)$.

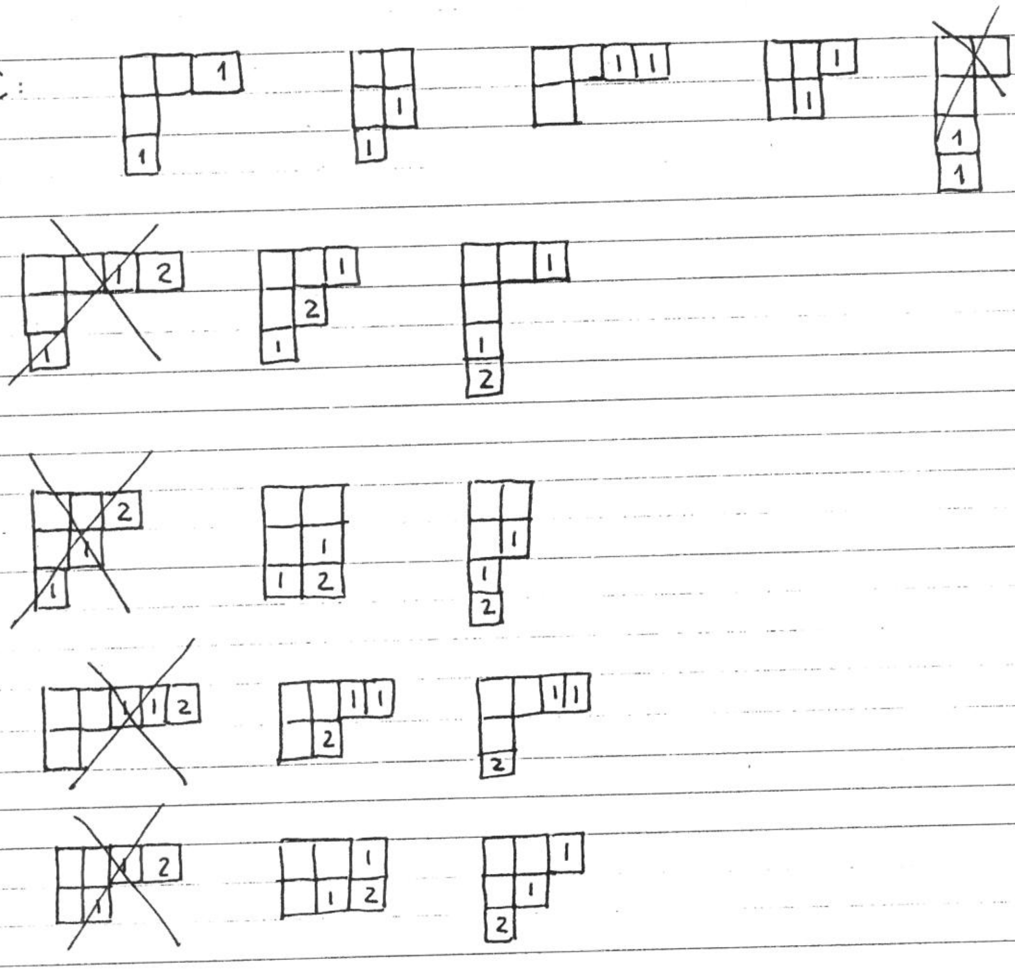
C. Quando lendo os quadradinhos adicionados nas linhas (de cima para baixo) e de direita para esquerda, nunca devem haver mais k's que $(k-1)$'s em qualquer instância

Como exemplo da receita vamos ilustrar o produto externo das RI de S_3

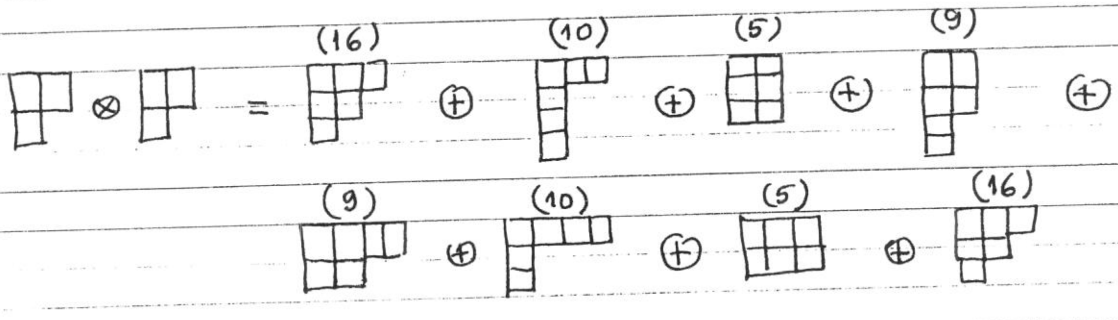
A.



B e C:



Finalmente temos a descomposição:



$$= 2\,(3,2,1) + (3,1^3) + (2^3) + (2^2,1^2) + (4,2) + (4,1^2) +$$
$$+ (3^2)$$

Somando as dimensões das RI da resolução obtemos

$$\sum \dim = 2\cdot 16 + 2\cdot 10 + 2\cdot 5 + 2\cdot 9 = 80,$$

isto é devemos obter 80 funções bases. Estas funções devem ser formadas como combinações lineares de todas as possíveis funções produtos. Agora bem as rep. $\begin{array}{|c|c|}\hline \, & \, \\ \hline \, & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$ em S_3 são bidimensionais, logo podemos formar quatro funções produto. Agora das seis partículas, três delas são escolhidas arbitrariamente. Este processo pode ser feito de $\binom{6}{3}$ maneiras diferentes. O número total de funções produto geradas são

$$\binom{6}{3} \times 4 = \frac{6!}{3!\,3!} \times 4 = \frac{\cancel{3!}\cdot 4\cdot 5\cdot \cancel{6}}{\cancel{3!}\;\cancel{6}} \times 4 = 80$$

que é o número já calculado.

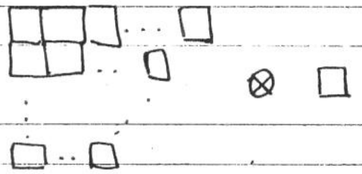
Os produtos externos com moldes que são os puramente linhas (completamente simétricos) ou puramente colunas (completamente antisimétricos) são muito fáceis de achar.

<u>Exemplos</u>

a)
$$\underset{\psi(1)}{\square} \otimes \underset{\phi(2)}{\square} = \square\square + \begin{array}{c}\square\\[-4pt]\square\end{array}$$

Como não existe nenhuma restrição sobre a simetria podemos adicionar o quadradinho de todas as maneiras possíveis. As funções geradas são $\{\psi(1)\phi(2) \pm \psi(2)\phi(1)\}$

b) Para um diagrama arbitrário $[\lambda]$ teremos

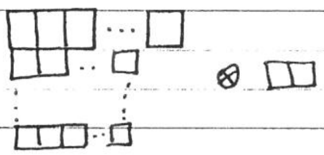


Como também não existe nenhuma condição sobre a simetria (se tem apenas uma partícula) o quadradinho pode ser adicionado de todas as maneiras possíveis (que gerem moldes permitidos de Young). Escreve-se isto como:

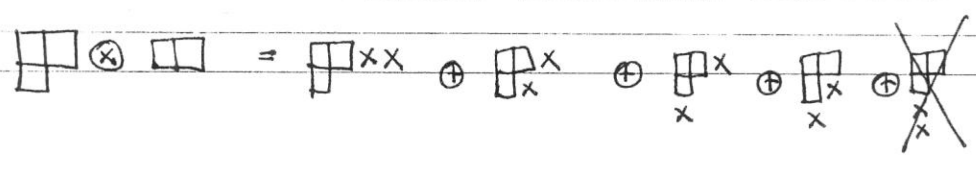
$$[\lambda] \otimes [1] = (\lambda_1 \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n) \otimes [1]$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_i + 1 \leq \lambda_{i-1} \\ i = 1, 2, \ldots, n, n+1}} (\lambda_1, \ldots, \lambda_i + 1, \ldots, \lambda_n, 0) \qquad \text{com } \lambda_{n+1} = 0$$

c) Vejamos agora os produtos

$[\lambda] \otimes [2] =$ 

A função de onda $\psi_{\square\square}$ de duas partículas é completamente simétrica em relação à permutações destas duas partículas, mas não existe nenhuma condição sobre as permutações combinadas com as partículas da partição $[\lambda]$. Assim pois devem-se formar todos os moldes de Young permissíveis de jeito que não fiquem os novos quadradinhos numa mesma coluna



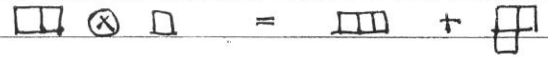
d) Em geral para o produto externo com um molde completamente simétrico □□□··□ de $\underline{m}$ quadradinhos podemos adicionar os quadradinhos de todas as maneiras possíveis (permitidas) de jeito que não fiquem quadradinhos numa mesma coluna

e) A regrinha anterior pode ser usada para as rep. associadas. O que na regra d) vale para colunas deve ser agora mudado para linhas. Isto é nos produtos externos

$$[\lambda] \otimes [1^m]$$

o $\underline{m}$ quadradinhos de $[1^m]$ devem ser adicionados de todas as maneiras permissíveis de jeito que não fiquem novos quadradinhos numa mesma linha

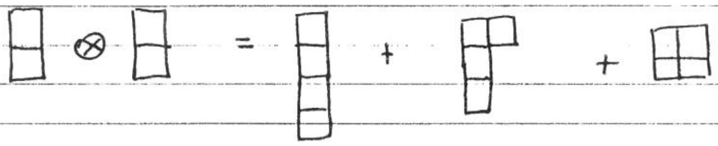
f) Os produtos sucesivos podem ser calculados em qualquera ordem. A lei distributiva é valida. Assim os produtos externos podem ser calculados por "escadas". Ilustremos o método:



$$(2) \otimes (1) = (3) + (2,1)$$

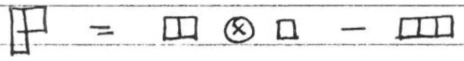
$$(2) \otimes (2) = (4) + (3,1) + (2,2)$$

$$(2) \otimes (1^2) = (2\,1^2) + (3,1)$$



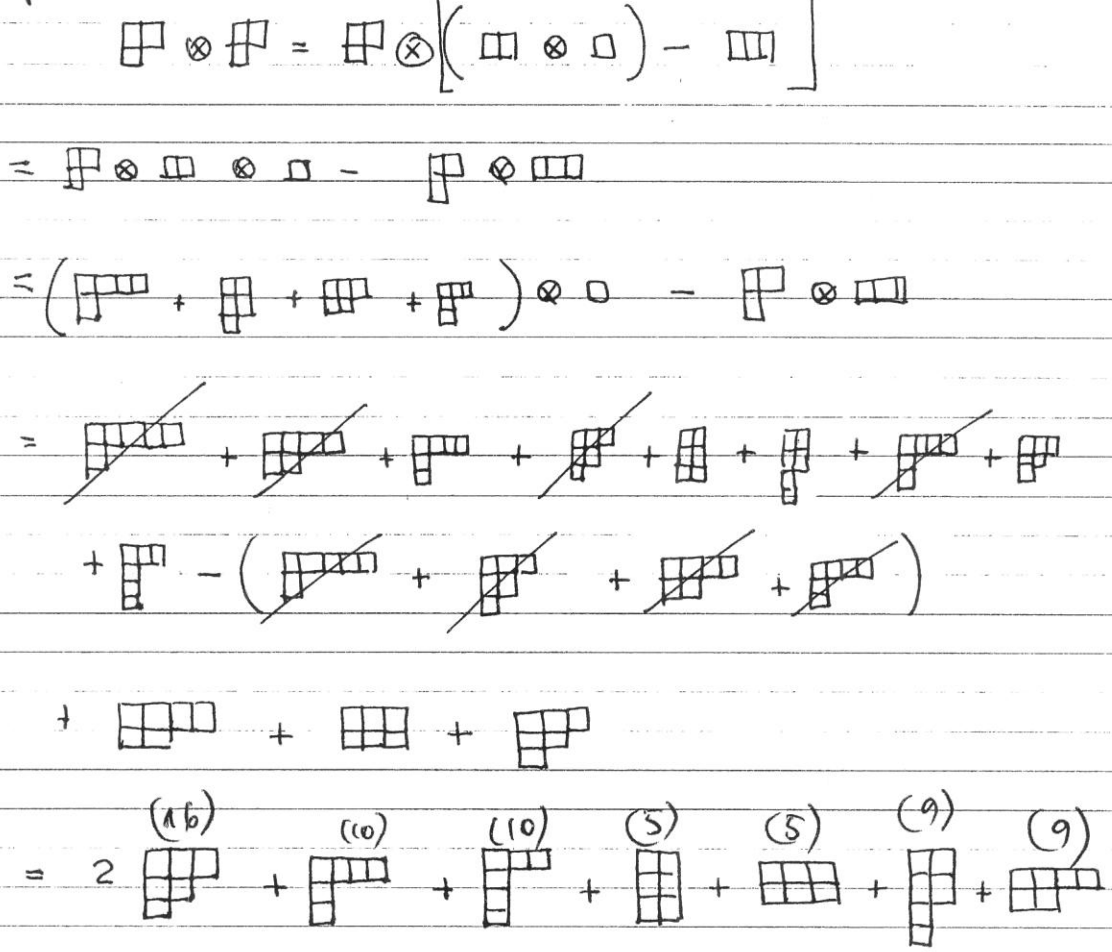
$$(1^2) \otimes (1^2) = (1^4) + (2\,1^2) + (2^2)$$

Da primeira relação obtemos



Assim um produto externo com ⊞ é reduzido a produtos com diagramas (moldes) ou puramente simetricos o puramente antisimé-tricos.

Exemplo:



dim = 80